Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*

Matematično-fizikalni praktikum

Četrta naloga: *Diskretna Fourierova transformacija*

Simon Bukovšek, 28211067

Mainz, 1. november 2023

Profesor: prof. dr. Borut Paul Kerševan

Naloga: DFT

- Izračunaj Fourierov obrat Gaussove porazdelitve in nekaj enostavnih vzorcev, npr. mešanic izbranih frekvenc. Za slednje primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen (kako naredimo Gaussovo porazdelitev 'periodično' za FT?). Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo in preveri natančnost metode. Poglej, kaj se dogaja z časom računanja - kako je odvisen od števila vzorčenj?
- Po Fourieru analiziraj 2,3 s dolge zapise začetka Bachove partite za violino solo, ki jih najdeš na spletni strani Matematičnofizikalnega praktikuma. Signal iz začetnih taktov partite je bil vzorčen pri 44 100 Hz, 11 025 Hz, 5512 Hz, 2756 Hz, 1378 Hz in 882 Hz. S poslušanjem zapisov v formatu `.mp3` ugotovi, kaj se dogaja, ko se znižuje frekvenca vzorčenja, nato pa s Fourierovo analizo zapisov v formatu `.txt` to tudi prikaži.

1 Uvod

Fourierovo transformacijo funkcije $h(t)$ lahko definiramo kot:

$$\mathcal{F}(h)(\nu) = H(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i \nu t)\, \mathrm{d}t.$$

Lahko definiramo tudi obratno transformacijo:

$$\mathcal{F}^{-1}(H)(t) = h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\nu) \exp(-2\pi i \nu t)\, \mathrm{d}\nu.$$

Funkcija $h(t)$ je običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots N-1.$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto (frekvenco) $f = 1/\Delta$. Za tako definiran vzorec obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $\nu_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-\nu_c, \nu_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije, kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve* (*aliasing*), ko se zunanji del spektra preslika v interval.

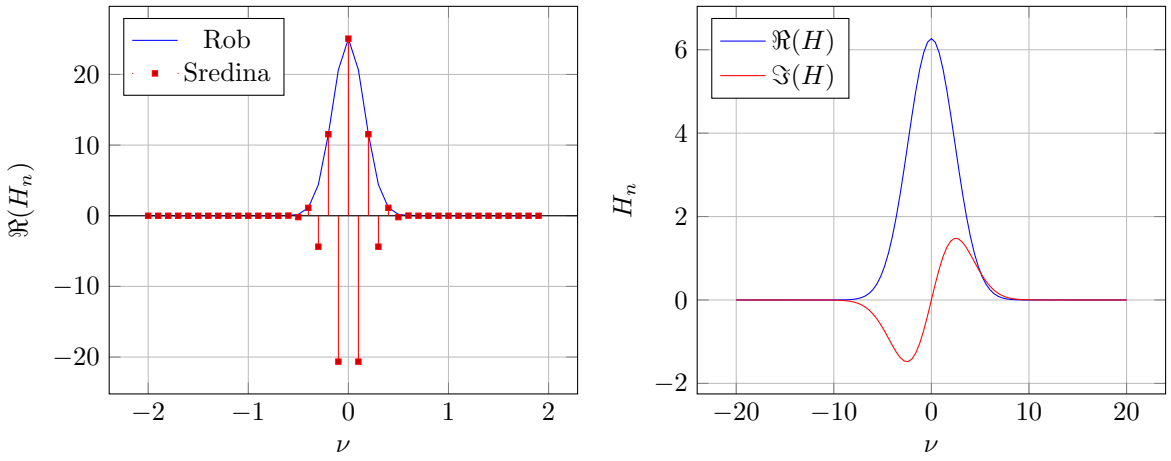
Frekvenčni spekter vzorčene funkcije računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i k n/N), \qquad n = -\tfrac{N}{2}, \ldots, \tfrac{N}{2},$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija in je povezana s funkcijo H takole:

$$H(\tfrac{n}{N\Delta}) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko pustimo indeks n v zgornji enačbi teči tudi od 0 do N. Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \le n \le \frac{N}{2} - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < \nu < \nu_c$, gornja polovica ($\frac{N}{2} + 1 \le n \le N - 1$) pa negativnim, $-\nu_c < \nu < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N/2$ pa ustreza tako ν_c kot $-\nu_c$.



(a) Prikaz realnega dela Fourierove transformacije za Gaussovo funkcijo na intervalu $[-5, 5]$. Vzorčenih je bilo $N = 100$ enakomerno porazdeljenih točk.

(b) Prikaz realnega in imaginarnega dela Fourierove transformacije Gaussove funkcije ($\sigma = 1$). Vzorčenje je bilo na intervalu $[-20, 20]$ z $N = 100$ točkami.

Slika 1: Nekaj prikazov Fourierove transformacije Gaussove funkcije.

2 Diskretna Fourierova transformacija

2.1 Gaussova porazdelitev

Za začetek se lotimo izračuna Fourierove transformacije Gaussove porazdelitve:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

Transformacija je:

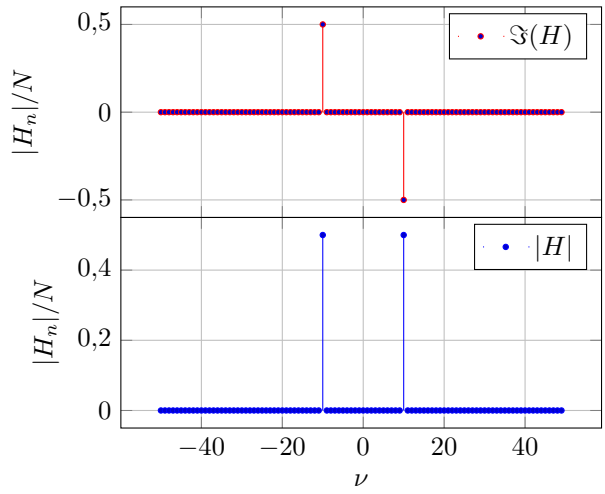
$$H(\nu) = \exp\left(-\frac{(2\pi\nu\sigma)^2}{2}\right).$$

Preverimo, kako to deluje v praksi. Gaussovo funkcijo lahko vzorčimo na dva načina: na intervalu $[-a, a]$ ali pa na intervalu $[0, a]$ in nato vrednosti še zrcalimo čez točko a. Tukaj je a poljubno izbrana točka približno nekaj velikosti σ. V drugem primeru smo Gaussovo funkcijo na nek način naredili periodično. Ker pa Fourierova transformacija (FT) vedno smatra, da vhodni seznam predstavljajo točke, ki so enakomerno porazdeljene med 0 in 1, dobimo dva različna rezultata. Na Sliki 1a nam modra krivulja predstavlja realni del FT za drugi primer (vzorčenje $[0, a]$ in zrcaljenje), rdeči glavnikasti prikaz pa realni del FT prvega primera (vzorčenje $[-a, a]$). V tem primeru je bil $a = 5\sigma$, vzorčenih pa je bilo $N = 100$ točk. V obeh primerih smo spet dobili Gaussovo funkcijo po absolutni vrednosti. Realne komponente pa v drugem primeru alternirajoče spreminjajo predznak. Razlog za to leži v tem, da je FT vzela celotno območje $[-a, a]$ za interval $[0, 1]$, torej vrh krivulje leži na točki $1/2$. Ker gre za premaknjeno funkcijo, velja formula:

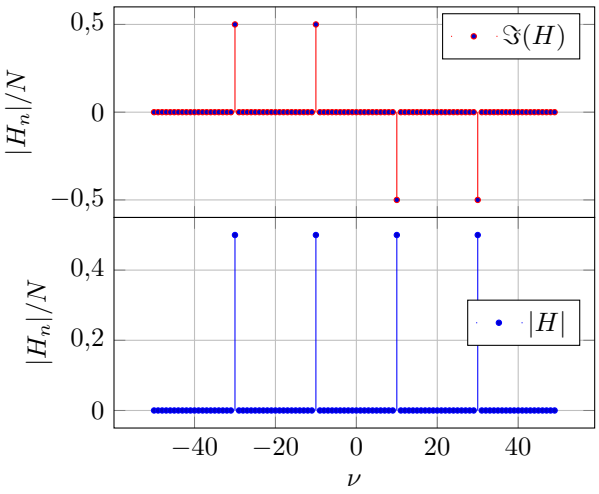
$$\mathcal{F}(h(t-\tau)) = \mathcal{F}(h)(\nu)e^{2\pi i\nu\tau}.$$

Ker je $\tau = 1/(2\nu_c)$, je modulacija ravno alternirajoča.

Na Sliki 1b pa sem spremenil območje vzorčenja na $a = 20\sigma$, hkrati pa sem še vedno vzorčil le $N = 100$ točk. Posledica tega je mnogo bolj odebeljena Gaussova funkcija. V tem primeru imamo težavo, saj je v okolici vrha popolnoma premalo vzorčnih točk, da bil lahko dobro ocenili debelino krivulje. V limiti večanja intervala pri konstantni količini vzorčnih točk bi dobili neke vrste δ-funkcijo, transformirana Gaussovka pa bi se prelila v konstantno funkcijo. To pa ni nič drugega kot opis Heisenbergovega principa nedoločenosti. Bolj oster kot je vrh v časovni domeni, tem širši je v frekvenčni domeni. Na Grafu 1b je zanimivo opazovati tudi imaginarni del FT. Proporcionalno glede na realni del je dokaj majhen, vendar se čudovito vidi njegova lihost. Gaussova funkcija je realna, torej lahko pričakujemo sod realni del in lih imaginarni del.

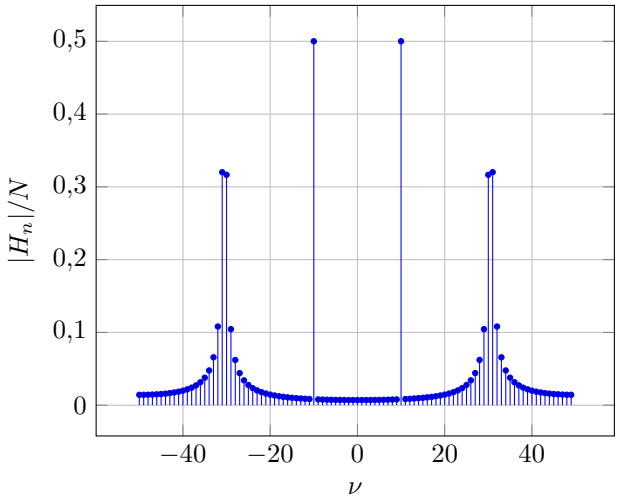


(a) Prikaz Fourierove transformacije popolnoma sinusnega signala s periodo 10: $h(t) = \sin(20\pi t)$. Vzorčenje je bilo na intervalu $[0, 1]$ z $N = 100$ točkami.



(b) Prikaz Fourierove transformacije signala $h(t) = \sin(20\pi t) + \sin(60\pi t)$. Vzorčenje je bilo na intervalu $[0, 1]$ z $N = 100$ točkami.

Slika 2: Nekaj prikazov Fourierove transformacije sinusnih funkcij s celimi večkratniki periode.



Slika 3: Prikaz pojava *puščanja* (angl. *leakage*). Vzorčenje je bilo na intervalu $[0, 1]$ z $N = 100$ točkami. Vzorčena funkcij je bila $h(t) = \sin(20\pi t) + \sin(61\pi t)$.

2.2 Periodični vzorci

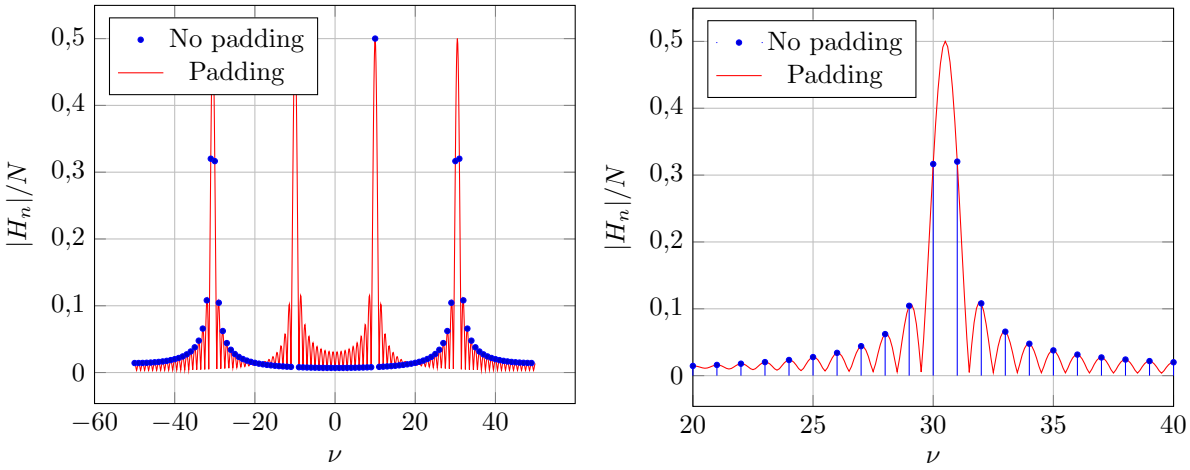
Poglejmo si nekaj lastnosti in posebnosti Fourierove transformacije na podlagi nekaterih periodičnih vzorcev. Najprej si oglejmo transformacijo popolnoma sinusnega signala s periodo 1. Graf 2a prikazuje točno to, kar bi pričakovali. Povsod ničle, razen pri desetici in minus desetici je špica. Realni del je povsod enak nič, zato ni narisan na graf. Imaginarni del je pričakovano lih. Višina špic je točno enaka 1/2. Ko se negativni in pozitivni prispevek seštejeta, dobimo točno 1, kar je ravno amplituda začetne funkcije. Na sosednjem Grafu 2b je prikaz FT funkcije $h(t) = \sin(20\pi t) + \sin(60\pi t)$. Poleg enake špice kot na grafu 2a dobimo še eno špico pri $\nu = \pm 30$. Razvidno je, da sta amplitudi obeh valovanj enaki.

Kaj pa se zgodi, če perioda našega vzorca ni večkratnik osnovne frekvence. Pojav prikazuje Graf 3. Narisana je FT funkcije $h(t) = \sin(20\pi t) + \sin(61\pi t)$ vzorčene na intervalu $[0, 1]$ na stotih mestih. Na prvi pogled bi pričakovali sliko, zelo podobno grafu 2b, vendar je narava malo manj enostavna. Pojavita se dve glavni težavi: višine vrhov niso več sorazmerne z jakostjo signala in sam signal ni več omejen na pravo frekvenco. Spremeni se jakost drugih bližnjih frekvenc. Vrh pri frekvenci $\nu = 10$ pa s tem pojavom ni prizadet. Četudi se zdi, da se puščanje dogaja v rahlo večji meri v smeri proti večji absolutni vrednosti frekvence, je to samo posledica potujitve, ki jo bomo obravnavali v enem od naslednjih podpoglavij.

2.3 Zero padding

Možna metoda za natančnejšo določitev tako lokacije kot tudi intenzitete vrha se imenuje *zero padding*. Na koncu signala dodamo ničle in s tem *navidezno* izboljšamo natančnost meritve. Na Slikah 4b je z modro prikazana FT iste funkcije kot na 3, to je $h(t) = \sin(20\pi t) + \sin(61\pi t)$, vzorčena na $N = 100$ točkah. V rdečem primeru pa sem na konec signala dodal še 900 ničel. Frekvenčna ločljivost se pri tem za desetkrat zviša, kar prinese tako prednosti kot slabosti.

- *Prednost*: natančnost določitve frekvence vrha se izboljša (v mojem primeru za faktor 10).
- *Prednost*: natančnost določitve jakosti vrha se izboljša.
- *Slabost*: čas računanja se poveča (v mojem primeru za faktor 100, s FFT za faktor okoli 10).
- *Slabost*: dobimo precej nenavadno oscilatorno obnašanje, ki ga prej ni bilo.
- *Slabost*: puščanje se zgodi tudi pri frekvencah, pri katerih ga prej ni bilo.

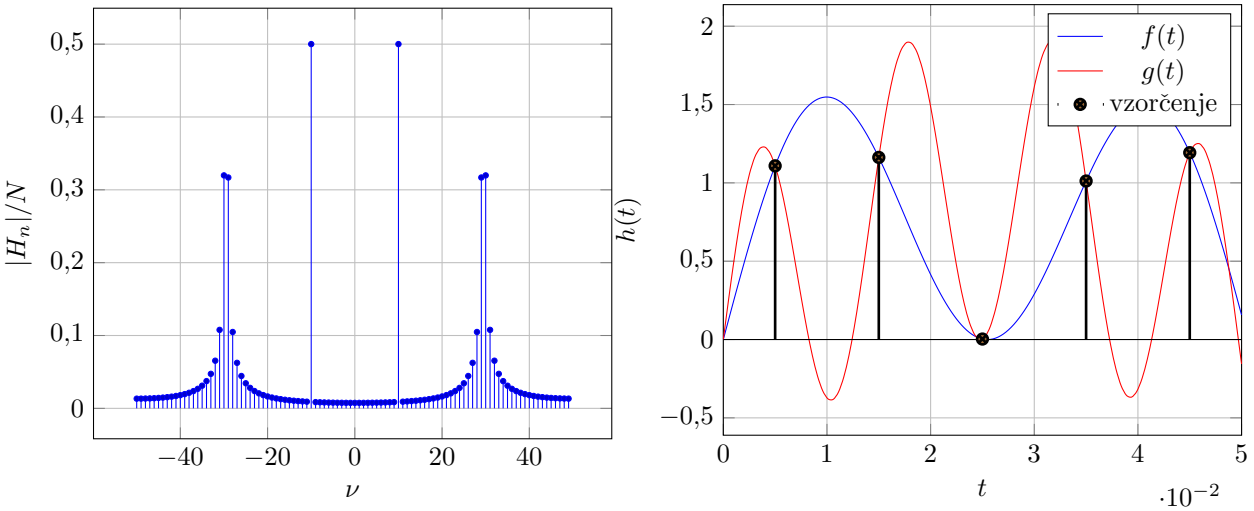


(a) Širša slika. **(b)** Povečan prikaz v okolici $\nu = 30$.

Slika 4: Prikaz uporabe *zero paddinga*. Vzorčenje je bilo na intervalu $[0, 1]$ z $N = 100$ točkami. Vzorčena funkcij je bila $h(t) = \sin(20\pi t) + \sin(71\pi t)$. Z modrim glavnikastim prikazom je označena osnovna funkcija, z rdečo pa ista funkcija z dodanimi 900 ničlami.

2.4 Potujitev

Če naš vzorec vsebuje frekvence, ki so večje od Nyquistove frekvence ν_c, pride do pojava, imenovanega *potujitev* (angl. *aliasing*). Frekvence, ki so višje od ν_c se toliko časa zrcalijo okoli ν_c in $-\nu_c$, dokler ne pristanejo znotraj območja $[-\nu_c, \nu_c]$. Za demonstracijo si poglejmo Sliko 5a. Prikazuje FT funkcije $h(t) = \sin(20\pi t) + \sin(141\pi t)$. Iz transformacije pa se zdi, kot da je vsebovana frekvenca $\nu = 29{,}5$. To se zgodi, ker velja $50 - 70{,}5 = -29{,}5$. S Slike 5b lahko vidimo, da je vzrok za identično sliko pravzaprav identični začetni vzorec. Čeprav imamo dve popolnoma drugačni funkciji, je vzorčenje obeh natanko enako. Vseeno pa lahko opazimo pojav puščanja.



(a) Prikaz potujitve. Vzorčenje je bilo na intervalu $[0, 1]$ z $N = 100$ točkami. Vzorčena funkcij je bila $h(t) = \sin(20\pi t) + \sin(141\pi t)$. Transformacija pa trdi, da je prisotna frekvenca $\nu = 29{,}5$.

(b) Primer vzorčenja dveh različnih funkcij: $f(t) = \sin(20\pi t) + \sin(141\pi t)$ in $g(t) = \sin(20\pi t) + \sin(59\pi t)$. Ker sta obe funkciji vzorčeni s frekvenco $\nu = (59 + 141)/4 = 50\,\text{Hz}$, so vse vzorčene vrednosti enake.

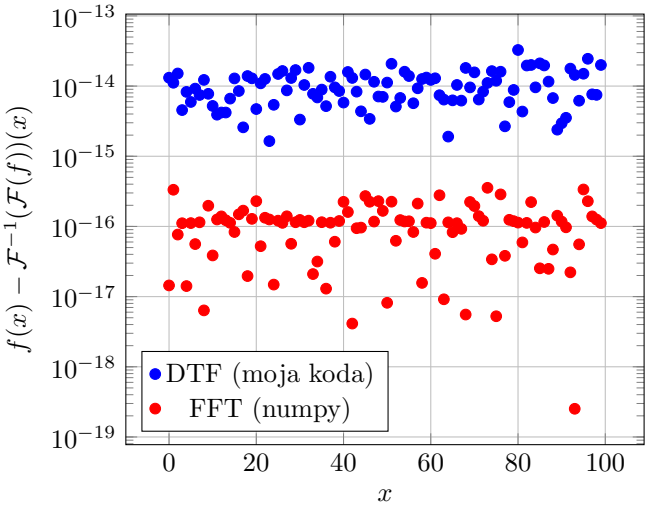
Slika 5: Prikaz in razlaga pojava potujitve.

2.5 Obratna transformacija

Na hitro si poglejmo še inverzno transformacijo. Če je vse pravilno implementirano, mora veljati

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(h))(t).$$

Na Grafu 6 je prikazana natančnost obrata oziroma razlika med začetno in dvakrat transformirano funkcijo. Funkcija je popoln šum, torej $h(t) = \text{Rand}(0, 1)$. Razlika za moji implementaciji FT in inverzne FT je okoli 10^{-14}, kar bi pričakovali pri natančnosti float64 in približno stotih seštevanjih. Uporaba numpyjeve rutine `fft` in `ifft` pa je še bolj natančna in se giblje v okolici 10^{-16}, kar je približno tudi natančnost float64. Seveda pa sama natančnost ne pove vsega, oziroma prej da lažen občutek varnosti. Več o tem v naslednjem poglavju.



Slika 6: Prikaz razlike med začetno funkcijo in dvakrat transformirano (v modrem). V rdečem je isti prikaz za numpyjevi rutini `fft` in `ifft`.

2.6 Čas računanja

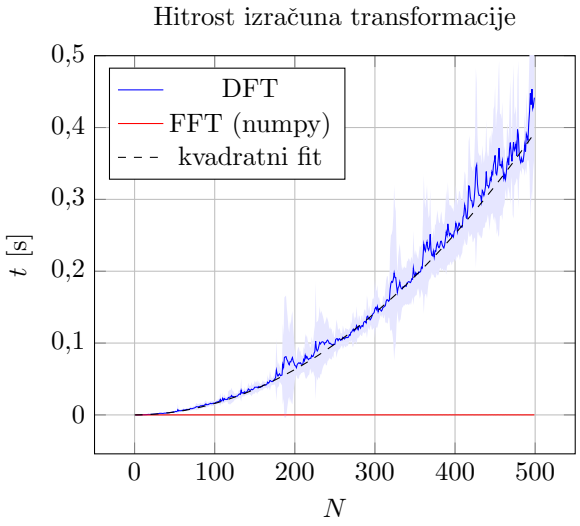
Pomenljivejšo zgodbo o uspešnosti moje implementacija FT pripovedujeta grafa 7a in 7b. S prvega grafa se vidi kvadratna rast mojega algoritma $\mathcal{O}(n^2)$ in to, da je fft nepredstavljivo boljši. Na svoje meritve sem poskusil prilegati kvadratno funkcijo $t(N) = aN^2 + bN + c$ in sem dobil naslednje parametre:

$$a = (1{,}570 \pm 0{,}011) \cdot 10^{-6}\,\text{s}, \quad b = (2{,}277 \pm 0{,}012) \cdot 10^{-6}\,\text{s}, \quad c = (-2{,}5 \pm 4{,}0) \cdot 10^{-6}\,\text{s}.$$

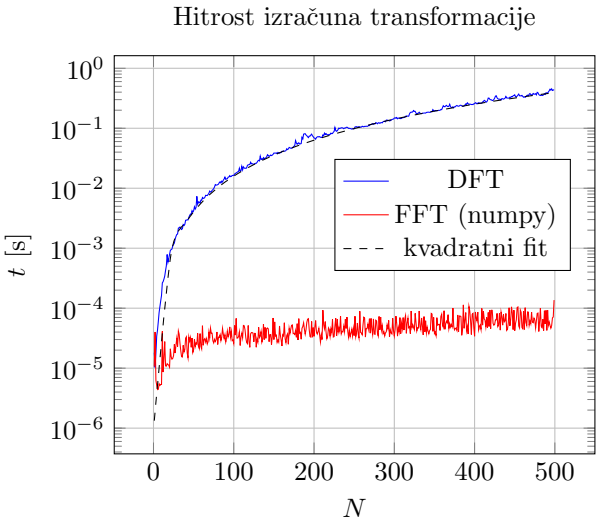
Funkcija se lepo prilega, kvadratno rast pa lahko ugotovimo tudi s pogledom na kodo; vsebuje namreč dvojno zanko dolžine N. Ker je `fft` algoritem tako "overpowered", si moramo isti graf pogledati tudi na logaritemski skali (Graf 7b). V primerjavi z mojo implementacijo je FFT skoraj konstanten. V teoriji je njegova kompleksnost $\mathcal{O}(n \log n)$, vendar pri tako majhnih velikostih nisem uspel ujeti dobrega fita.

2.7 Bachova partita

V spletni učilnici smo imeli šest različnih posnetkov istega takta Bachove partite za violino solo. Za vse sem naredil Fourierovo transformacijo. Pri vzorčenju $\nu = 882\,\text{Hz}$ je bil posnetek skoraj neprepoznaven, saj se je slišalo le grmenje. Pri vzorčni frekvenci ν je najvišja zaznana frekvenca $\nu/2$, zato na tistem posnetku ne slišimo več od 441 Hz. Ob pogledu na graf 8 se neprepoznavnost zdi nenavadna, saj je večina moči shranjene v frekvencah manjših od 441 Hz. Ne smemo pa pozabiti, da človeški sluh zaznava zvok logaritemsko, torej moramo zares opazovati Graf 9. Z večanjem frekvence vzorčenja se zvočnim posnetkom viša tudi frekvenčni spekter. Posnetkov 11 025 Hz in 44 100 Hz skoraj ne morem več razločiti. Posnetek 44 100 Hz doda na pram posnetku 11 025 Hz le frekvence, ki so večje od $\nu = 5\,\text{kHz}$. Te frekvence so v spektru zelo slabo zastopane, hkrati pa tudi človeško uho nanje ni zelo občutljivo. Sicer pa tudi moj



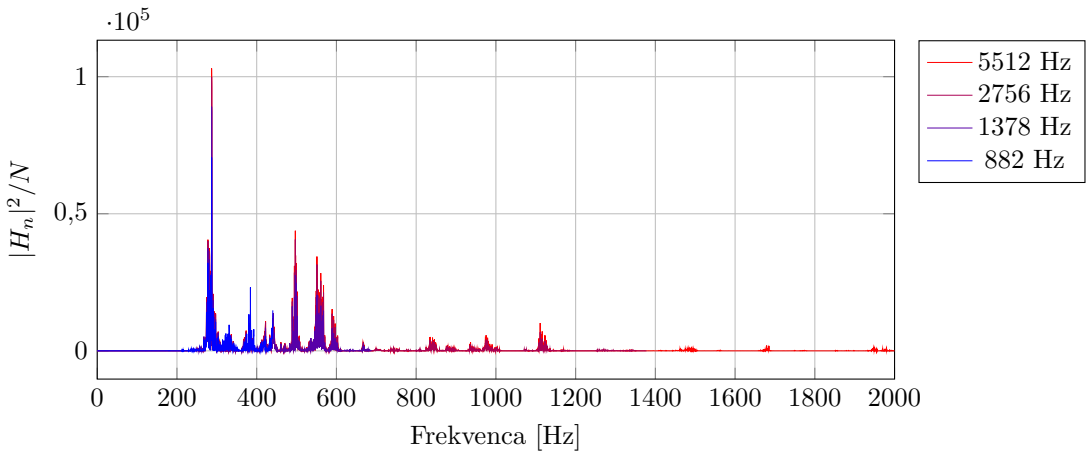
(a) Čas izračuna FT za različno velike vzorce. V modrem je moja implementacija, v rdečem numpy `fft` rutina. V svetlem je prikazan standardni odklon časa izračunov.



(b) Ker je numpy rutina toliko hitrejša od moje, se splača situacijo pregledati še na logaritemskem prikazu.

Slika 7: Hitrosti izračuna FT.

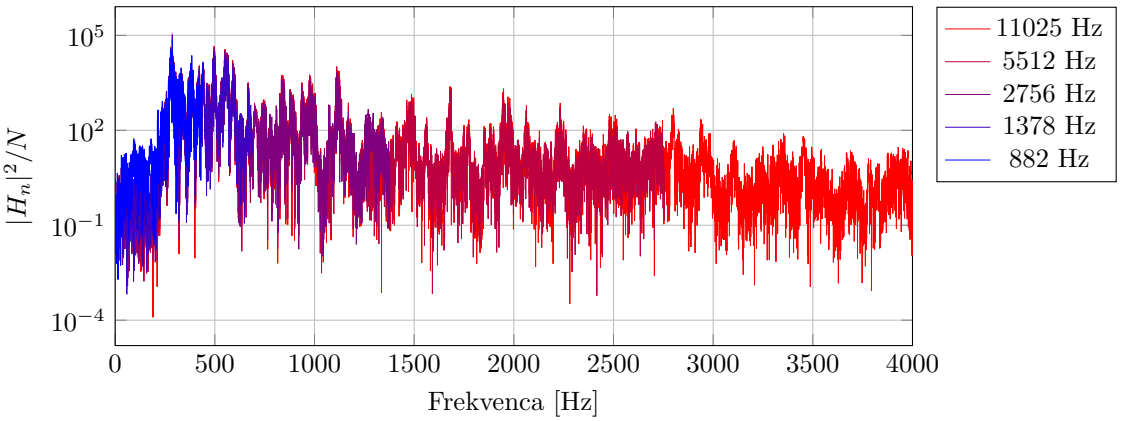
glasbeni antitalent ne pripomore k situaciji. V luči mojega precejšnjega nerazumevanja glasbene teorije lahko le modro pripomnim, da se maksimum spektra nahaja pri frekvenci $\nu_{\max} = 287\,\mathrm{Hz}$, kar ne ustreza nobeni noti, najbližje je D_4. Dobršen del prispevajo tudi frekvence 277 Hz ($\mathrm{D}_4^\flat$), 494 Hz (B_4), 555 Hz ($\mathrm{D}_5^\flat$) in 1111 Hz ($\mathrm{D}_6^\flat$). Očitno so oktave note des ($\mathrm{D}^\flat$) zelo izrazita.



Slika 8: Fourierove transformacije štirih posnetkov z različnimi vzorčnimi frekvencami. Prikaz je le do $\nu = 2000$, saj so prispevki naprej premajhni, da bi jih lahko videli.

2.8 Wilbraham-Gibbsov pojav

Od kar smo pri pouku matematike prvič spoznali Fourierovo vrsto, mi je v spominu ostal zanimiv pojav. Če malo pobrskamo po matematičnih zapiskih, najdemo sledeče.



Slika 9: Fourierove transformacije petih posnetkov z različnimi vzorčnimi frekvencami.

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva funkcija na $I = [0, 1]$. Naj ima v neki točki $x_0 \in (0, 1)$ levo limito $f(x_0^-)$, desno limito $f(x_0^+)$ in v točki x_0 skok velikosti a:

$$f(x_0^+) - f(x_0^-) = a \neq 0.$$

Naj bo $S_N f$ delna Fourierova vsota do člena N. Velja

$$\lim_{n\to\infty} S_N f\left(x_0 + \frac{1}{2N}\right) = f(x_0^+) + a \cdot 0{,}0895...,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_N f\left(x_0 - \frac{1}{2N}\right) = f(x_0^-) - a \cdot 0{,}0895...$$

in

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Temu pojavu se reče *Wilbraham-Gibbsov fenomen*, vrednost 0,0895 pa lahko izrazimo s pomočjo sinusnega integrala:

$$0{,}089\,489\,872\,235... = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{Si}(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

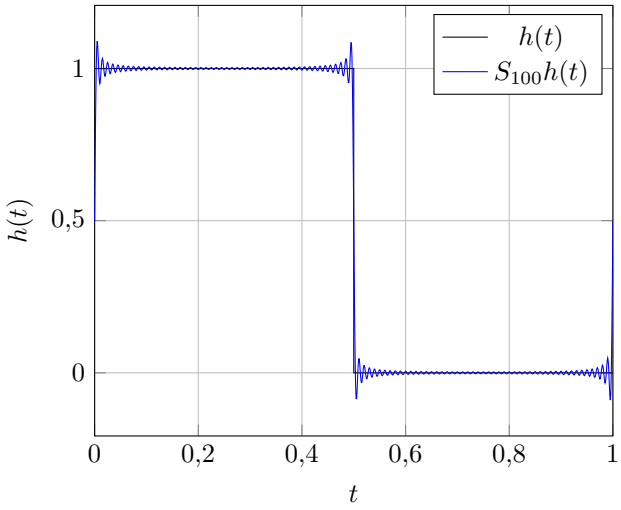
Poglejmo si pojav na primeru stopničaste funkcije:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2) \\ 0, & t \in [1/2, 1) \end{cases}.$$

Pojav je prikazan na Sliki 10. Izračunane vrednosti preskoka za različne N so zbrane v Tabeli 1.

N	$S_N f(1/2 - 1/(2N)) - 1$
10	0,09116410442880296
100	0,08950653965521460
1000	0,08949003890282636
10 000	0,08948987390275631
100 000	0,08948987225275973
1 000 000	0,08948987223623805
točna vrednost	0,08948987223608363

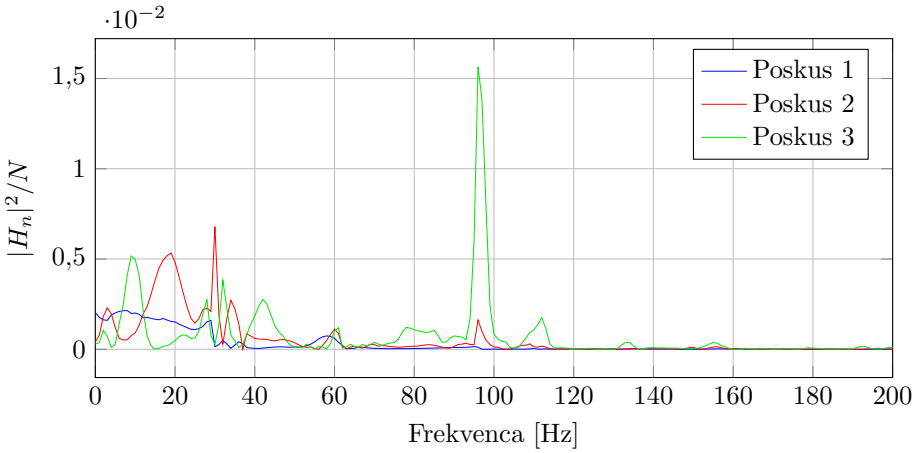
Tabela 1: Vrednosti preskoka za različne N.



Slika 10: Prikaz Wilbraham-Gibbsovega pojava na stopničasti funkciji.

2.9 Dodatna naloga

Za dodatno nalogo sem analiziral posnetke treh različnih udarcev na akustični resonator. Na Sliki 11 so prikazani šibek udarec (modro), močan udarec (rdeče) in zelo močan udarec (zeleno). Osredotočil sem se na frekvence, nižje od 200 Hz. Pri zelo nizkih frekvencah vidimo različne prispevke od različnih udarcev, ki pa so najbrž le zvok samega udarca in ne resoniranja. Vsi tri poskusi pokažejo manjši vrh pri frekvenci 60 Hz, zadnje dva pa vsebujeta zelo izrazit vrh pri 97 Hz.



Slika 11: Fourierove transformacije treh posnetkov akustičnega resonatorja: slaboten udarec (poskus 1), močnejši udarec (poskus 2) in zelo močan udarec (poskus 3).

3 Zaključek

Naj bo tokrat zaključek malo krajši. Fourierova transformacija je zelo uporabna in zanimiva stvar. Tokratna naloga nas je vodila v odkrivanje različnih lastnosti in posebnosti transformacije. Če bi moral izpostaviti najzanimivejšo, bi to bilo puščanje, saj je res nadvse ne-intuitiven pojav.

Transformacija, ki sem jo sam napisal, pa je resnično pomilovanja vredna, saj je popolnoma neuporabna za kakršnekoli daljše nabore podatkov. To je še posebej v oči bodeče, ko stoji zraven FFT. Lekcija za naslednjič je torej, če lahko uporabiš FFT, je to boljša možnost.